

Interpolasi Lagrange

Dr. Eng. Supriyanto, M.Sc

Lab. Komputer, Departemen Fisika, Universitas Indonesia

email: supri@fisika.ui.ac.id atau supri92@gmail.com

December 13, 2006

Interpolasi Lagrange diterapkan untuk mendapatkan fungsi polinomial $P(x)$ berderajat tertentu yang melewati sejumlah titik data. Misalnya, kita ingin mendapatkan fungsi polinomial berderajat satu yang melewati dua buah titik yaitu (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) . Langkah pertama yang kita lakukan adalah mendefinisikan fungsi berikut

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

dan

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

kemudian kita definisikan fungsi polinomial sebagai berikut

$$P(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1$$

Jika semua persamaan diatas kita gabungkan, maka akan didapat

$$\begin{aligned} P(x) &= L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 \\ P(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1 \end{aligned}$$

dan ketika $x = x_0$

$$P(x_0) = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x_0 - x_0}{x_1 - x_0}y_1 = y_0$$

dan pada saat $x = x_1$

$$P(x_1) = \frac{x_1 - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0}y_1 = y_1$$

dari contoh ini, kira-kira apa kesimpulan sementara anda? Ya.. kita bisa sepakat bahwa fungsi polinomial

$$P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1 \quad (1)$$

benar-benar melewati titik (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) .

Sekarang mari kita perhatikan lagi contoh lainnya. Misalnya ada tiga titik yaitu (x_0, y_0) , (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) . Tentukanlah fungsi polinomial yang melewati ketiganya! Dengan pola yang sama kita bisa awali langkah pertama yaitu mendefinisikan

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

lalu

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

dan

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

kemudian kita definisikan fungsi polinomial sebagai berikut

$$P(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$$

Jika semua persamaan diatas kita gabungkan, maka akan didapat fungsi polinomial

$$P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}y_2$$

Kita uji sebentar. Ketika $x = x_0$

$$P(x_0) = \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}y_0 + \frac{(x_0 - x_0)(x_0 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}y_1 + \frac{(x_0 - x_0)(x_0 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}y_2 = y_0$$

pada saat $x = x_1$

$$P(x_1) = \frac{(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}y_0 + \frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}y_1 + \frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}y_2 = y_1$$

pada saat $x = x_2$

$$P(x_2) = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}y_0 + \frac{(x_2 - x_0)(x_2 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}y_1 + \frac{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}y_2 = y_2$$

Terbukti bahwa fungsi polinomial

$$P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}y_2 \quad (2)$$

melewati ketiga titik tadi.

Kalau kita bandingkan antara persamaan (1) dan persamaan (2), terlihat bahwa derajat persamaan (2) lebih tinggi dibandingkan dengan derajat persamaan (1). Hal ini terlihat dari x^2 pada persamaan (2) sementara pada persamaan (1) hanya ada x . persamaan (2) disebut fungsi polinomial berderajat 2, sedangkan persamaan (1) disebut fungsi polinomial berderajat 1.